הטכניון – הפקולטה למתמטיקה
משוואות דיפרנציאליות רגילות ח' 104131
בחינה סופית - חורף תש"ף **מועד ב'** 19.08.2020
משך הבחינה: שלוש שעות.
בהצלחה!

חלק א' (90 נקודות)

בשאלות הבאות סמנו את התשובה הנכונה. יש לסמן תשובה אחת בלבד.

שאלה 1 (10 נקודות): נתונה משוואה $y''' + ay'' + by' = x + 2e^{-x}\cos 3x + \sin x$,
כאשר a, b מקדמים קבועים ממשיים שונים מאפס.
ידוע פתרון $v(x) = 2e^{-x}$ של המשוואה ההומוגנית המתאימה.
סמן (ללא חישוב המקדמים) את הצורה הנכונה של הפתרון הפרטי של המד"ר הנתונה (לא הומוגנית):

$$y_p = a_0x^3 + a_1x^2 + e^{-x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + D\sin x + E\cos x$$
$$y_p = a_0x + a_1x^2 + e^{-x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + D\sin x + E\cos x$$
$$y_p = a_0x + a_1x^2 + e^{-x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + Dx\sin x + Ex\cos x$$
$$y_p = a_0x + a_1x^2 + A\cos 3xe^{-x} + B\sin 3x + D\sin x + E\cos x$$
$$y_p = a_0 + a_1x + xe^{-x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + D\sin x + E\cos x$$
$$y_p = a_0x + a_1x^3 + e^{-2x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + Dx\sin x + Ex\cos x$$
$$y_p = a_0x + a_1x^2 + e^{-x}\left(A\cos 3x + B\sin 3x\right) + Dx^2\sin x + Ex^2\cos x$$
$$y_p = a_0x + a_1x^2 + e^{-x}\left(Ax\cos 3x + Bx\sin 3x\right) + Dx\sin x + Ex\cos x$$

שאלה 2 (10 נקודות):
תזכורת: פתרון של בעיית ההתחלה הוא פונקציה המקיימת את המד"ר ואת התנאים באופן רציף.
נתונה הבעיה

$$\begin{cases} x^3y''' - x^2y'' - 8xy' = 0, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = y''(1) = 0. \end{cases}$$

אז

א) קיימים אינסוף פתרונות של הבעיה המוגדרים לכל $x \in \mathbb{R}$,
ב) לא קיים פתרון של הבעיה המוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$,
ג) קיים פתרון יחיד של הבעיה המוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$,
ד) קיים פתרון של הבעיה המקיים את $\lim_{x\to\infty} y(x) = 2$,
ה) קיים פתרון של הבעיה המקיים את $\lim_{x\to\infty} y(x) = \infty$.
ו) הפתרון של הבעיה הוא פונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
ז) הפתרון של הבעיה הוא פונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
ח) קיים פתרון של הבעיה המקיים את $y(2) = 2$.

שאלה 3 (10 נקודות): עקומים האורתוגונליים לכל עקום ממשפחה
$x^2+y^2+Ce^{x^2+y^2}=0$, $C<0$ הם

א) פרבולות,
ב) אליפסות,
ג) מעגלים משיקים ציר X,
ד) קווים ישרים,
ה) היפרבולות,
ו) ספירלות,
ז) מעגלים משיקים ציר Y,
ח) מעגלים משיקים ציר X וציר Y.

שאלה 4 (10 נקודות): נתונה המשוואה

$$y''-\frac{x^2}{x^3+1}y=0,\quad x>1,$$

אז הוורונסקיאן $W(x)$ של המשוואה המקיים את $W(\pi)=1$ הוא

א) שווה ל- $\sqrt[3]{\frac{x^3+1}{\pi^3+1}}$ בתחום $x>1$,

ב) שווה לאפס לכל $x>1$,

ג) פונקציה יורדת ממש בתחום $x>1$,

ד) פונקציה עולה ממש בתחום $x>1$,

ה) מוגדר לכל $x\in\mathbb{R}$ ומחזורי.

ו) שווה ל- $\pi^3\left(x^3+1\right)$ בתחום $x>1$,

ז) שווה ל- $\sqrt[3]{\frac{x+1}{\pi+1}}$ בתחום $x>1$,

ח) שווה ל- $\left(x^3+1\right)\left(\pi^3+1\right)$ בתחום $x>1$,

תזכורת: פונקציה $f(x)$ נקראת מחזורית בתחום D אם קיים $T\in\mathbb{R}$ כך שמתקיים לכל $f(x+T)=f(x)$. ל- T קוראים מחזור של פונקציה $f(x)$. פונקציה קבועה היא פונקציה מחזורית עם מחזור לא מוגדר.

שאלה 5 (10 נקודות): נתונה משוואה $y' + e^{\cos^2 x} y = e^{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$

אז

א) פתרון של המשוואה העובר דרך הנקודה $(0,0)$ עובר גם דרך הנקודה $(2,2)$,

ב) פתרון של המשוואה המקיים את $y(0) = \frac{1}{2}$ מקיים גם $\lim_{x\to\infty} y(x) = 2$,

ג) פתרון של המשוואה המקיים את $y(\pi) = 2$ מקיים גם $\lim_{x\to\infty} y(x) = -1$,

ד) פתרון של המשוואה העובר דרך הנקודה $(1,1)$ עובר גם דרך הנקודה $(2,2)$,

ה) פתרון של המשוואה המקיים את $y(\pi) = 1$ מקיים גם $\lim_{x\to\infty} y(x) = 1$.

ו) פתרון של המשוואה המקיים את $y(2) = 0$ מקיים גם $\lim_{x\to\infty} y(x) = 5$,

ז) פתרון של המשוואה המקיים את $y(\pi) = \frac{1}{2}$ מקיים גם $\lim_{x\to\infty} y(x) = -1$,

ח) פתרון של המשוואה המקיים את $y(\pi) = \frac{1}{3}$ מקיים גם $\lim_{x\to\infty} y(x) = -\frac{1}{3}$,

שאלה 6 (10 נקודות): נתונה המערכת $\vec{X}'(t) = \mathbf{A}\vec{X}(t)$ כאשר

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ ו- $\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$, כאשר $a > 1$. נתונים תנאי התחלה $\vec{X}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

אזי הפתרון של המערכת המקיים את תנאי ההתחלה מקיים גם

א) $\lim_{t\to-\infty} x_1(t) = \lim_{t\to\infty} x_1(t)$

ב) $\lim_{t\to-\infty} x_2(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = 0$

ג) $\lim_{t\to-\infty} x_2(t) = \lim_{t\to\infty} x_2(t) = 1$

ד) $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = \lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$

ה) $\lim_{t\to-\infty} x_2(t) = \lim_{t\to\infty} x_1(t)$

ו) $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0$

ז) $\lim_{t\to\infty} x_2(t) = 1$

ח) $\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 5$

שאלה 7 (10 נקודות): נתונה המשוואה $(2xy)dx+(y^2-2x^2+1)dy=0$. אז הפתרון של המשוואה בצורה $x=f(y)$ המקיים $x(1)=-2$ הוא:

א) לא קיים
ב) לא יחיד
ג) מקיים את $x(\sqrt{e})=-\sqrt{3e+0.5}$
ד) מקיים את $x(e)=-\sqrt{3e+0.5}$
ה) מקיים את $x(\sqrt{e})=\pm\sqrt{3e+0.5}$
ו) מקיים את $x(e)=\sqrt{3e-0.5}$
ז) מקיים את $x(\sqrt{e})=\sqrt{3e+0.5}$
ח) מקיים את $x(\sqrt{e})=-\sqrt{3e}$

שאלה 8 (10 נקודות): נתונה המשוואה $x>2$ $\quad y''-\frac{2(x-1)}{x^2-2x}y'+\frac{2}{x^2-2x}y=0,$ כאשר ידוע פתרון אחד של המשוואה $y_1(x)=x^2$. אז הפתרון של המשוואה המקיים את תנאי ההתחלה $y(3)=0,\quad y'(3)=3$ מקיים גם:

א) $y(4)=5$
ב) $\lim_{x\to\infty}y(x)=9$
ג) $\lim_{x\to\infty}y(x)=2$
ד) $\lim_{x\to\infty}y(x)=-1$
ה) $y(4)=-5$
ו) $y(4)=9$
ז) $y(4)=0$
ח) $y(4)=2$

שאלה 9 (5 נקודות): נתונה בעית ההתחלה

$y''-9y=f(t),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2,\quad t\ge 0$ כאשר

$f(t)=\begin{cases}-3, & 0\le t<2,\\ 1, & t\ge 2\end{cases}$.

אזי התמרת לפלס $Y(s)$ של הפתרון של הבעיה שווה ל-

א) $\frac{1}{s^2-9}\left(2-\frac{3}{s}+\frac{4}{s}e^{-2s}\right)$

ב) $2-\frac{3}{s}+\frac{4}{s}e^{-2s}$

ג) $\frac{1}{s^2-9}$

ד) $\frac{1}{s^2-9}\left(2+\frac{4}{s}e^{-2s}\right)$

ה) $\frac{1}{s^2-9}\left(2-\frac{3}{s}\right)$

ו) $\frac{1}{s^2-9}\left(2-\frac{3}{s}+e^{-2s}\right)$

ז) $\frac{1}{s^2-9}\left(\frac{3}{s}+\frac{4}{s}e^{-2s}\right)$

ח) $\frac{1}{s^2-9}\left(2+\frac{1}{s}\right)$

שאלה 10 (5 נקודות): $F(s)=\frac{2}{s^2-9}$ התמרת לפלס של פונקציה $f(t)$.

אזי $f(t)$ שווה ל-

א) $\frac{e^{3t}-e^{-3t}}{3}$

ב) $\frac{e^{3t}+e^{-3t}}{3}$

ג) $e^{3t}-e^{-3t}$

ד) $\frac{e^{3t}-e^{-3t}}{4}$

ה) $\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{4}$

ו) $\frac{e^{4t}+e^{-4t}}{4}$

ז) $\frac{e^{4t}-e^{-4t}}{9}$

ח) $\frac{e^{3t}-e^{-3t}}{9}$

חלק ב:

<u>שאלה 11</u> <u>(10 נקודות) :</u> נתונות פונקציות $f_1(x),\ f_2(x),\ \ x \in I \subseteq \mathbb{R}$ רציפות וגזירות פעם אחת ברציפות בתחום I. הוכיחו שאם הפונקציות $f_1(x),\ f_2(x)$ תלויות באופן לינארי ב- I, אז וורונסקיאן שלהן מתאפס זהותית ב- I.

<u>הוכחה:</u>

שלב 1
אם $f_1(x),\ f_2(x),\ \ x \in I \subseteq \mathbb{R}$ תלויות אז מתקיים $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2\ f_2(x) = 0,\ \ x \in I \subseteq \mathbb{R}$
כאשר לא כל α_1, α_2 שווים לאפס לכל $x \in I \subseteq \mathbb{R}$.

שלב 2
נגזור את השוויון $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2\ f_2(x) = 0$ ונקבל $\alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2\ f_2'(x) = 0$.

שלב 3
נקבל מערכת משוואות

$$\begin{cases} \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2\ f_2(x) = 0 \\ \alpha_1 f_1'(x) + \alpha_2\ f_2'(x) = 0 \end{cases}$$

כאשר לכל $x_0 \in I$ למערכת עבור α_1, α_2 קיים פתרון לא טריביאלי.

שלב 4
אז (לפי משפט אלגברה) לכל $x_0 \in I$ מתקיים $\begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{vmatrix} = 0$.

שלב 5
לכן, $W[f_1, f_2](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0$ לכל $x \in I$.